

Prise en compte du frottement dans les fissures en compression-cisaillement dans un modèle d'endommagement anisotrope appliqué aux CMCs

Accounting for friction in cracks under compression and shear in an anisotropic damage model and application to CMCs

Emmanuel Baranger¹

¹ : LMT

ENS Paris-Saclay, CNRS, Université Paris-Saclay
61 avenue du Président Wilson, F- 94235 Cachan Cedex
e-mail : emmanuel.baranger@ens-paris-saclay.fr

Résumé

Les composites à matrice céramique sont de bons candidats pour la fabrication de pièces pour moteurs aéronautiques ou dans le domaine du nucléaire. Concernant la famille des composites SiC/SiC, un réseau de fissures inter-torons peut se développer orthogonalement à la direction de chargement. Ce type de mécanisme a conduit au développement des modèles d'endommagement anisotropes dans la littérature avec l'introduction de variables tensorielles. Une des difficultés réside dans la prise en compte de la refermeture des fissures à travers l'utilisation de potentiels ayant de bonnes propriétés. Le présent papier porte sur l'amélioration du modèle de [1] pour la prise en compte des données expérimentales obtenues par [2] sur des tubes SiC/SiC sous chargements de traction-compression-torsion complexes. En particulier, le frottement dans les fissures est modélisé par une déformation anélastique pilotée par une projection du chargement selon les directions d'endommagement. La possibilité de régulariser un tel modèle est présentée sur la base d'un modèle à gradient.

Abstract

Ceramic matrix composites are good candidates for the manufacturing of aeronautical parts as well as nuclear ones. Regarding the SiC/SiC family of composites, an inter-yarn crack network can develop orthogonally to the loading direction. This kind of mechanism has led to the development of the so-called anisotropic damage models in the literature introducing tensorial variables. A difficulty resides in accounting for the crack closure effect and the definition of potentials with good properties. The present paper proposes an enhancement of the model from [1] to take into account experimental data obtained by [2] for SiC/SiC tubes under complex tension-compression-torsion loadings. The friction within cracks is modeled using anelastic strains driven by a projection on the damage directions. The possibility to regularize such models is also presented based on a gradient model.

Mots Clés : CMC, endommagement anisotrope, frottement, régularisation

Keywords : CMC, anisotropic damage, friction, regularisation

1. Liste des symboles

\mathbb{C}_0	Tenseur de souplesse initial
$\Delta\mathbb{C}, \Delta\mathbb{Z}, \Delta\mathbb{C}_m, \Delta\mathbb{Z}_m$	Tenseurs de souplesse endommagée
$\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 + \Delta\mathbb{C}$	
$\mathbb{H} = \mathbb{C}^{\frac{1}{2}}$ and $\mathbb{H}_0 = \mathbb{C}_0^{\frac{1}{2}}$	
$\rho\Psi^{el}$	Potentiel, ρ est la masse volumique
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_+, \boldsymbol{\sigma}_-$	Contrainte, contrainte positive relativement à \mathbb{H} contrainte négative relativement à \mathbb{H}_0
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Déformation
$\mathbb{Y}', \mathbb{Y}', \mathbb{Y}''$	Forces thermodynamiques
\otimes	Produit tensoriel
:	Produit contracté entre tenseurs d'ordre 2
::	Produit contracté entre tenseurs d'ordre 4
$(\cdot)_{sym}$	Partie symétrique
\mathbb{I}	Identité (ordre 4)

2. Introduction

Les composites à matrice céramique (CMCs) sont de bon candidats pour la fabrication de structures aéronautiques chaudes (moteurs) ou dans des applications nucléaires nécessitant de bonnes propriétés mécaniques à haute température ou sous irradiation. Dans le cas de matériaux SiC/SiC, en fonction de leur procédé de fabrication, des fissures orthogonales à la direction de chargement peuvent apparaître parmi d'autres réseaux de fissures [3]. La modélisation de ces réseaux de fissures a donné lieu aux modèles d'endommagement anisotropes [4, 5]. L'utilisation de variables d'endommagement pour décrire l'effet de fissures est généralement introduit par le concept de contrainte effective, dans un premier temps pour des variables scalaires [6, 7]. Le problème devient plus ardu pour des variables tensorielles comme dans [8], il s'agit alors de préserver les bonnes symétries et des équivalences en déformation ou en énergie [9]. Notons que le présent modèle [1] n'introduit pas cette contrainte effective. La prise en compte de la fermeture des fissures et donc de la restauration de la rigidité en compression est un problème majeur. Important pour les CMCs [10], ce problème est connu plus généralement dans le cadre des matériaux fragiles ([11] par exemple). La difficulté réside en l'obtention de relations contrainte/déformation continue, en d'autres mots, de potentiels convexes par rapport à la contrainte ou à la déformation pour des chargements multi-axiaux non-proportionnels [12, 13, 14]. Ce problème est bien géré pour les variables d'endommagement scalaires discrétisant un espace de directions possibles de fissuration comme dans [15, 16]. Cela est nettement plus difficile dans le cas des modèles tensoriels comme [17, 10]. Ici, nous focaliserons sur le modèle de [1]. Celui-ci a été étendu aux chargements multi-axiaux en suivant la méthode de [18] dans [19] afin de mieux représenter les travaux expérimentaux récents développés au CEA [20, 21], et richement instrumentés, confirmant les observations macroscopiques de l'ONERA [2]. La prise en compte du frottement lors de la refermeture des fissures a été développée dans [22]. Le présent article présentera ce modèle ainsi que les résultats associés, principalement issus des travaux de l'ONERA [2].

3. Modèle d'endommagement initial

Afin d'introduire une cinématique d'endommagement assez libre, différents auteurs ont choisi une description de cet endommagement par des tenseurs d'ordre 4 [23, 5]. Dans le cas du modèle de [1], l'idée est de laisser la cinématique complètement libre a priori puis de spécifier celle-ci grâce aux lois d'évolution. La seconde idée est de séparer les contributions correspondant aux différents réseaux de fissures comme dans [24, 25].

3.1. Potentiel et variables d'état

Le potentiel élastique $\rho\Psi^{el}$ est écrit en contrainte comme la somme de trois contributions : la première est active en tension uniquement, la deuxième en compression uniquement et la troisième est active tout le temps. Cela donne :

$$\rho\Psi^{el} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ : \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}_+ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_- : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\sigma}_- + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \Delta\mathbb{Z} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Eq. 1})$$

$\Delta\mathbb{C} = \mathbb{C} - \mathbb{C}_0$ et $\Delta\mathbb{Z}$ sont les variables d'endommagement du modèle, par définition elles sont positives et ont les symétries d'un tenseur de souplesse. Leurs racines sont notées \mathbb{H} et \mathbb{H}_0 . $\boldsymbol{\sigma}_+$ et $\boldsymbol{\sigma}_-$ sont les parties positives de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ définies pour prendre en compte le contact unilatéral dans les fissures. Pour obtenir un potentiel convexe [26], deux décompositions sont utilisées :

$$\boldsymbol{\sigma}_+ = \mathbb{H}^{-1} : \langle \mathbb{H} : \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ \quad (\text{Eq. 2})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_- = \mathbb{H}_0^{-1} : \langle \mathbb{H}_0 : \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \quad (\text{Eq. 3})$$

La relation contrainte déformation est donnée par (cf. annexe de [27] pour les éléments de calcul) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \rho\Psi^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\sigma}_- + \Delta\mathbb{Z} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Eq. 4})$$

Pour plus de simplicité et dans le cadre des caractérisation de [20], l'endommagement est ici réduit à une seule contribution (notée m). Les variables d'endommagement associées sont notées ΔC_m et ΔZ_m alors que dans [24] d'autres contributions sont ajoutées. D'où :

$$\Delta C = \Delta C_m \quad (\text{Eq. 5})$$

$$\Delta Z = \Delta Z_m \quad (\text{Eq. 6})$$

3.2. Forces thermodynamiques

Les forces thermodynamiques associées sont aussi des tenseurs d'ordre 4 :

$$\mathbb{Y} = \frac{\partial \rho \Psi^{el}}{\partial \Delta Z} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Eq. 7})$$

$$\mathbb{Y}' = \frac{\partial \rho \Psi^{el}}{\partial \Delta C} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_+ \otimes \boldsymbol{\sigma}_+ \quad (\text{Eq. 8})$$

Une autre force est introduite pour gérer le cisaillement, en 2D :

$$\mathbb{Y}'' = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+)_{sym} \otimes (\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+)_{sym} \quad (\text{Eq. 9})$$

où $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan.

3.3. Lois d'évolution

Pour construire les lois d'évolution, une force équivalente est introduite :

$$z_m(\mathbb{Y}') = \left((1-a) \text{Tr}[\mathbb{Y}'^{m+1}] + a \text{Tr}[\mathbb{Y}'^{n+1}] \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (\text{Eq. 10})$$

$$(\text{Eq. 11})$$

a permet de passer d'un endommagement isotrope à un endommagement directionnel. n (impaire) permet de mettre l'accent sur la directionnalité du dommage. z_m est positif.

Le maximum de cette force sur le temps est défini par :

$$\bar{z}_m(t) = \sup_{\tau \leq t} z_m(\mathbb{A}(\tau)) \quad (\text{Eq. 12})$$

Les lois d'évolution sont :

$$\Delta \dot{C}_m = \dot{\alpha}_m \frac{(1-a) \mathbb{Y}'^m + a \text{Tr}[\mathbb{Y}']^n \mathbb{I}}{\bar{z}_m^n} \quad (\text{Eq. 13})$$

$$\Delta \dot{Z}_m = \dot{\alpha}_m \frac{b \mathbb{Y}''^m}{\bar{z}_m^n} \quad (\text{Eq. 14})$$

$$\bar{z}_m(t) = \sup_{\tau \leq t} z_m(\mathbb{Y}'(\tau)) \quad (\text{Eq. 15})$$

$\alpha_m(\bar{z}_m)$ est une fonction scalaire croissante.

4. Prise en compte du frottement en compression cisaillement

[2] ont montré que lors de chargements de traction-compression-torsion, le frottement dans les fissures pouvait conduire à une reprise de rigidité en cisaillement. Le modèle précédent ne prenant en compte que le contact unilatéral, celui-ci n'est pas à même de décrire ce mécanisme associé à du frottement dans les lèvres de la fissure. Différents auteurs ont proposé des modélisations de ce mécanisme comme [11, 28]. Ici, on partira de l'approche de [29] pour construire le modèle.

4.1. Construction pour un pré-endommagement uniaxial

Supposons un état de chargement préliminaire décrit par $V_{nn} = \underline{n} \otimes \underline{n}$ tel que :

$$\sigma_+ = \sigma_{nn} V_{nn} \quad (\text{Eq. 16})$$

Celui-ci est associé à un endommagement préliminaire :

$$\Delta C_m = \alpha_1 V_{nn} \otimes V_{nn} \quad (\text{Eq. 17})$$

Introduisons le vecteur orthogonal à \underline{n} , noté \underline{t} . On a aussi $W_{nt} = (\underline{t} \otimes \underline{n})_{sym}$ qui mène à :

$$\Delta Z_m = \alpha_1 W_{nt} \otimes W_{nt} \quad (\text{Eq. 18})$$

Supposons désormais que cette étape préliminaire soit suivie d'un chargement σ_+ (different). Les contraintes normale et tangentielle aux fissures s'écrivent :

$$\sigma_{nn} = \sigma : V_{nn} \quad (\text{Eq. 19})$$

$$\sigma_{nt} = \sigma : W_{nt} \quad (\text{Eq. 20})$$

Ou encore :

$$\sigma_{nn}^2 = \frac{\sigma : \Delta C_m : \sigma}{\alpha_1} \quad (\text{Eq. 21})$$

$$\sigma_{nt}^2 = \frac{\sigma : \Delta Z_m : \sigma}{\alpha_1} \quad (\text{Eq. 22})$$

A partir de ces données, il est possible de mettre en place un modèle de frottement de Coulomb au niveau des fissures sous forme d'un modèle de plasticité à écrouissage cinématique. Une variable d'écrouissage est introduite comme un tenseur d'ordre 2 (appelé \mathbf{R}), notons :

$$r_{nt} = \mathbf{R} : W_{nt} \quad (\text{Eq. 23})$$

Dans une fissure sous chargement de compression, les contraintes normale et tangentielle doivent satisfaire le modèle de frottement de Coulomb :

$$(\sigma_{nt} - r_{nt})^2 - c\sigma_{nn}^2 \leq 0 \quad \text{si } \sigma_{nn} \leq 0 \quad (\text{Eq. 24})$$

c est le coefficient de frottement. $\sigma_{nt} - r_{nt}$ représente la contrainte de cisaillement sur les lèvres de la fissure. On peut ré-écrire sous la forme plus macroscopique :

$$(\sigma - \mathbf{R}) : \Delta Z_m : (\sigma - \mathbf{R}) - c\sigma : \Delta C_m : \sigma \leq 0 \quad \text{si } \sigma_{nn} \leq 0 \quad (\text{Eq. 25})$$

En tension, la fissure est ouverte et donc :

$$\sigma_{nt} - r_{nt} = 0 = (\sigma - \mathbf{R}) : \Delta Z_m : (\sigma - \mathbf{R}) \quad (\text{Eq. 26})$$

Combinons ces deux équations au sein d'une seule en introduisant $\Delta H_m = \Delta C_m^{\frac{1}{2}}$:

$$(\sigma - \mathbf{R}) : \Delta Z_m : (\sigma - \mathbf{R}) - c \langle \Delta H_m : \sigma \rangle_- \leq 0 \quad (\text{Eq. 27})$$

4.2. Ecriture générale du modèle

La déformation totale est décomposée comme suit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{plast}}{4} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{st} \quad (\text{Eq. 28})$$

Potentiel et lois d'état

La partie active en cisaillement est modifiée comme suit :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ : \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}_+ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_- : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\sigma}_- + \frac{1}{2}\mathbf{R} : \mathbb{Z} : \mathbf{R} \quad (\text{Eq. 29})$$

Si $\mathbb{Z} = \Delta\mathbb{Z}_m$, les lois d'état s'écrivent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\sigma}_- \quad (\text{Eq. 30})$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \mathbf{R}} = \Delta\mathbb{Z}_m : \mathbf{R} \quad (\text{Eq. 31})$$

$$\mathbb{Y} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ \otimes \boldsymbol{\sigma}_+ \quad (\text{Eq. 32})$$

$$\mathbb{Y}' = \frac{1}{2}\mathbf{R} \otimes \mathbf{R} \quad (\text{Eq. 33})$$

$$\mathbb{Y}'' = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+)_{sym} \otimes (\mathbf{r}_{\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+)_{sym} \quad (\text{Eq. 34})$$

Lois d'évolution

Dans cette première version, les lois d'évolution ne sont pas modifiées. A l'avenir, il sera nécessaire de conduire des expériences pour valider cela.

Critère de Coulomb et loi d'écoulement

Le critère de Coulomb s'écrit :

$$f = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) : \Delta\mathbb{Z}_m : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) - c < \Delta\mathbb{H}_m : \boldsymbol{\sigma} >_- : < \Delta\mathbb{H}_m : \boldsymbol{\sigma} >_- \quad (\text{Eq. 35})$$

Si il n'y a pas de contrainte de compression alors l'écrouissage est égal à la contrainte appliquée dans le direction endommagée. La loi d'écoulement dérive de :

$$g = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) : \Delta\mathbb{Z}_m : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) \quad (\text{Eq. 36})$$

Ceci donne :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{st} = \dot{\gamma}^{st} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}^{st} \Delta\mathbb{Z}_m : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) \quad (\text{Eq. 37})$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\gamma}^{st} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{R}} = \dot{\gamma}^{st} \Delta\mathbb{Z}_m : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{st} \quad (\text{Eq. 38})$$

5. Application

L'identification et la validation de ce modèle ont été menés à partir des résultats d'essais de [2], en particulier l'essai SiC05. Le trajet de chargement suivi lors de cet essai est complexe et représenté Figure 1. Il s'agit d'un chargement de traction incrémentale permettant de créer des endommagements, intercalé par des chargements tests de plus faibles amplitudes ne générant pas de dommage et permettant d'identifier les variations apparentes de module en traction, cisaillement ou chargements combinés.

A partir des cycles intermédiaires de traction pure et de cisaillement pur, les lois d'évolution du modèle sont identifiées. Pour ce qui est du comportement en cisaillement, la question se pose d'ores et déjà. Des chargements intermédiaires de cisaillement ayant été effectués avec ou sans contrainte longitudinale appliquée (constante), il est possible d'évaluer l'éventuel effet du frottement sur l'identification. Sur la Figure 2, sont représentés ces différents cycles alors que 5 incréments de chargement axial ont déjà

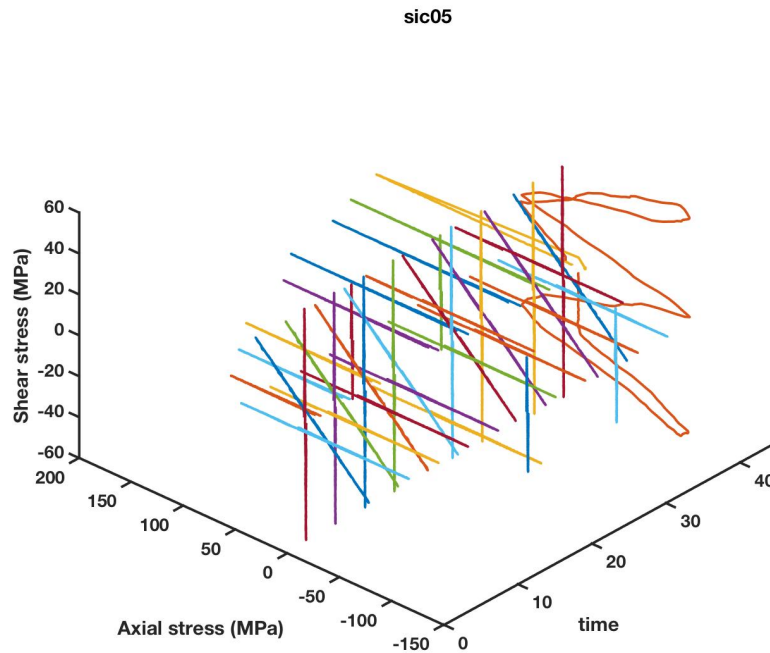


Fig. 1. Trajet de chargement

été vécus par l'éprouvette. On note que pour une contrainte axiale appliquée s négative, la rigidité en cisaillement initiale est retrouvée. Pour une contrainte axiale positive ou nulle (constante), le comportement en cisaillement est globalement le même. L'identification sera donc conduite pour un chargement en cisaillement pur.

Une fois ce comportement identifié, la reprise de raideur en compression cisaillement peut être illustrée sur les cycles de chargement proportionnels traction-compression / cisaillement. Les résultats sont présentés Figure 3 où sont comparées les évolutions expérimentales en couleur aux résultats du modèle en noir. A gauche, on observe bien la refermeture en compression des fissures dues au contact unilatéral dans celles-ci. A droite, on observe la reprise de rigidité initiale pour les contraintes de cisaillement négatives qui correspondent aussi à un état de chargement de compression. Cette partie est reliée au mécanisme de frottement dans les fissures.

6. Régularisation

La gestion de la localisation est un problème récurrent dans la modélisation de l'endommagement. Cette localisation des déformations est due à la perte de certaines propriétés du modèle, en particulier la perte d'ellipticité qui se traduit par la possibilité d'avoir un déterminant du tenseur acoustique nul. Pour un modèle comme celui présenté ici, la recherche des modes de localisation n'est pas simple pour deux raisons : le modèle est écrit en contrainte et pas en déformation (et il comporte des parties positives difficiles à traiter), la cinématique du modèle est très libre. Néanmoins, en suivant [30], il est possible de montrer qu'une régularisation par un modèle à gradient donne toujours de bons résultats si on se restreint à un modèle d'endommagement pur. Pour cela, il faut travailler sur le problème en séparant la déformation d'un côté et la variable à régulariser d'un autre. En choisissant des évolutions de ces deux variables sous la forme $A \cdot \exp(i\xi \underline{n}x)$ avec \underline{n} un vecteur unitaire. La condition de localisation s'écrit alors formellement :

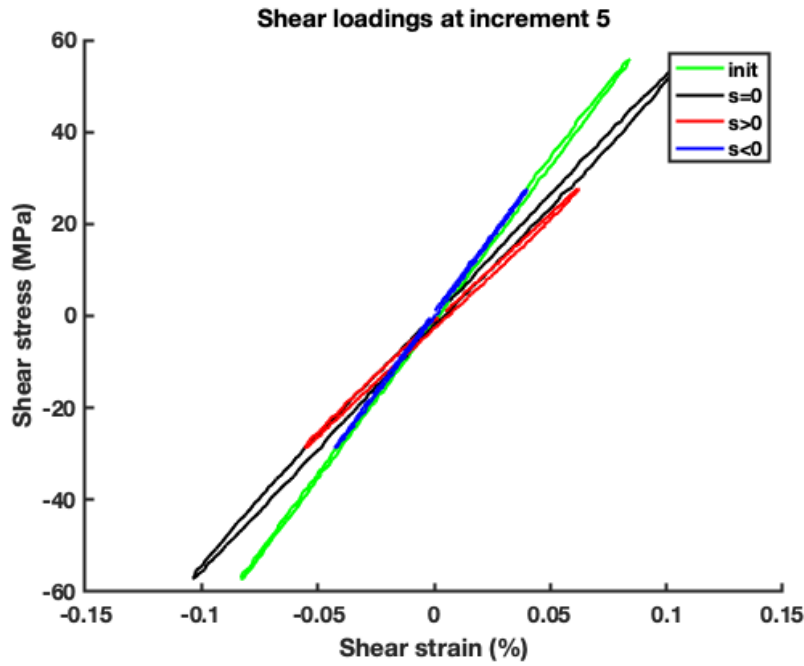


Fig. 2. Evolution du comportement pour des cycles de cisaillement en fonction de la charge axiale appliquée

$$\begin{aligned}
 0 &= \det \left(\begin{bmatrix} \underline{n} \cdot \underline{K}_s \cdot \underline{n} & \underline{n} \cdot \underline{B} \\ \underline{C} \cdot \underline{n} & \underline{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l_c^2 \xi^2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\underline{n} \cdot \underline{K}_s \cdot \underline{n} \underline{D} - \underline{n} \cdot \underline{B} \underline{C} \cdot \underline{n} + l_c^2 \xi^2 \underline{n} \cdot \underline{K}_s \cdot \underline{n} \right) \\
 &= \det \left(\underline{n} \cdot \underline{H} \cdot \underline{n} + l_c^2 \xi^2 \underline{n} \cdot \underline{K}_s \cdot \underline{n} \right) \quad (\text{Eq. 39})
 \end{aligned}$$

où K_s est la rigidité sécante du problème, B et C sont liés aux lois d'évolution et à la définition de la variable à régulariser. l_c est une longueur caractéristique associée à un modèle de type Peerlings [31]. Dans la dernière expression, on voit apparaître le tenseur acoustique du modèle non-régularisé $\underline{n} \cdot \underline{H} \cdot \underline{n}$. Si $l_c = 0$, celui-ci pilote la perte d'ellipticité. Si $l_c > 0$, le terme en ξ^2 devient prépondérant si ξ tend vers l'infini. Ce terme pilote alors le déterminant et implique une régularisation. La fréquence de coupure associée à la taille de régularisation est déterminée par cette équation. Cependant, comme les modes de localisation, cette fréquence est difficile à déterminer analytiquement.

Références

- [1] P. Ladevèze, An anisotropic damage theory with unilateral effects : applications to laminates and to three-and four-dimensional composites, Elsevier, O. Allix and F. Hild edn., 2002.
- [2] J. Maire, D. Pacou « Essais de traction-compression-torsion sur tubes composites céramique-céramique », in : JNC 10 : comptes-rendus des dixièmes journées nationales sur les composites, AMAC, Paris, , pp. 1225–1234, 1996.
- [3] X. Aubard « Modélisation et identification du comportement mécanique des matériaux composites 2D-C/SiC. », Ph.D. thesis, Thèse de doctorat : Paris VI, 1992.
- [4] M. Kachanov « Effective elastic properties of cracked solids : critical review of some basic concepts », *Applied Mechanics Reviews* Vol. 45 n° 8, pp. 304–335, 1992.
- [5] J. Ju « Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics », *Journal of Engineering Mechanics* Vol. 116 n° 12, pp. 2764–2770, 1990.
- [6] L. Kachanov « Time of the rupture process under creep conditions », *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk* Vol. 8, pp. 26–31, 1958.
- [7] Y. N. Rabotnov « Creep rupture », in : *Applied mechanics*, Springer, , pp. 342–349, 1969.
- [8] S. Murakami, N. Ohno « A continuum theory of creep and creep damage », in : *Creep in structures*, Springer, , pp. 422–444, 1981.
- [9] J. Cordebois, F. Sidoroff « Anisotropie élastique induite par endommagement », *Comportement mécanique des solides anisotropes* n° 295, pp. 761–774, 1979.

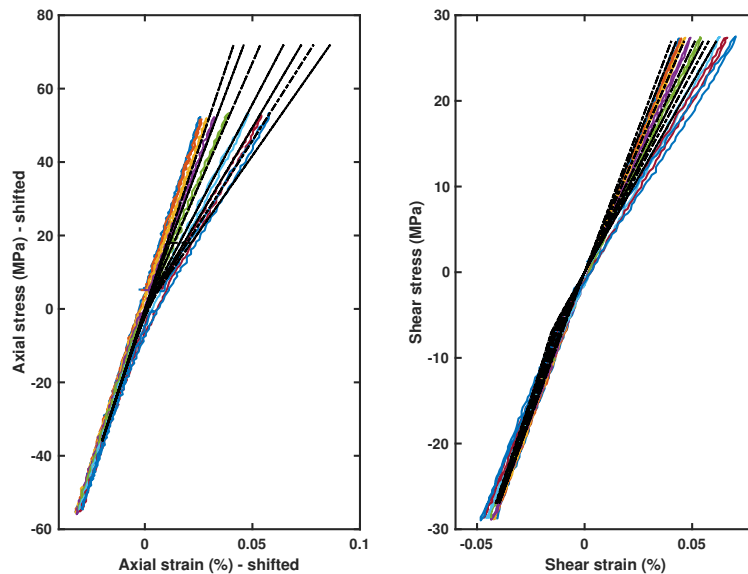


Fig. 3. Evolution du comportement pour des cycles de traction-cisaillement proportionnels

- [10] A. Gasser, P. Ladeveze, M. Poss « Damage mechanisms of a woven SiC/SiC composite : Modelling and identification », *Composites science and technology* Vol. 56 n° 7, pp. 779–784, 1996.
- [11] D. Halm, A. Dragon « An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials », *European Journal of Mechanics-A/Solids* Vol. 17 n° 3, pp. 439–460, 1998.
- [12] J.-L. Chaboche « Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition », *International Journal of Damage Mechanics* Vol. 1 n° 2, pp. 148–171, 1992.
- [13] I. Carol, K. Willam « Spurious energy dissipation/generation in stiffness recovery models for elastic degradation and damage », *International Journal of Solids and Structures* Vol. 33 n° 20, pp. 2939–2957, 1996.
- [14] A. Curnier, Q.-C. He, P. Zysset « Conewise linear elastic materials », *Journal of Elasticity* Vol. 37 n° 1, pp. 1–38, 1994.
- [15] L. Marcin, J.-F. Maire, N. Carrère, E. Martin « Development of a macroscopic damage model for woven ceramic matrix composites », *International Journal of Damage Mechanics* Vol. 20 n° 6, pp. 939–957, 2011.
- [16] F. Bernachy-Barbe, L. Gélébart, M. Bornert, J. Crépin, C. Sauder « Anisotropic damage behavior of SiC/SiC composite tubes : Multiaxial testing and damage characterization », *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* Vol. 76, pp. 281–288, 2015.
- [17] J. Chaboche, J. Maire « New progress in micromechanics-based CDM models and their application to CMCs », *Composites Science and Technology* Vol. 61 n° 15, pp. 2239–2246, 2001.
- [18] R. Desmorat, M. Chambart, F. Gatuingt, D. Guilbaud « Delay-active damage versus non-local enhancement for anisotropic damage dynamics computations with alternated loading », *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 77 n° 12, pp. 2294–2315, 2010.
- [19] E. Baranger « Extension of a fourth-order damage theory to anisotropic history : Application to ceramic matrix composites under a multi-axial non-proportional loading », *International Journal of Damage Mechanics* Vol. 27 n° 2, pp. 238 – 252, 2016.
- [20] F. Bernachy-Barbe, L. Gélébart, M. Bornert, J. Crépin, C. Sauder « Characterization of SiC/SiC composites damage mechanisms using Digital Image Correlation at the tow scale », *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* Vol. 68, pp. 101–109, 2015.
- [21] F. Bernachy-Barbé « Caractérisation des mécanismes d’endommagement et modélisation du comportement mécanique sous chargements multi-axiaux de tubes composites SiC/SiC », Ph.D. thesis, Paris, ENMP, 2014.
- [22] E. Baranger « Accounting for frictional contact in an anisotropic damage model based on compliance tensorial variables, illustration on ceramic matrix composites », *International Journal of Damage Mechanics* Vol. accepted.
- [23] J. Chaboche « Le concept de contrainte effective appliqué à l’élasticité et à la viscoplasticité en présence d’un endommagement anisotrope », in : *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Mécanique des Solides Anisotropes*, Springer, , pp. 737–760, 1982.
- [24] C. Cluzel, E. Baranger, P. Ladevèze, A. Mouret « Mechanical behaviour and lifetime modelling of self-healing ceramic-matrix composites subjected to thermomechanical loading in air », *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* Vol. 40 n° 8, pp. 976–984, 2009.

- [25] M. Genet, L. Marcin, E. Baranger, C. Cluzel, P. Ladevèze, A. Mouret « Computational prediction of the lifetime of self-healing CMC structures », *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* Vol. 43, pp. 294–303, 2012, ISSN 1359835X.
- [26] P. Ladevèze, E. Baranger, M. Genet, C. Cluzel, *Ceramic Matrix Composites : Materials, Modeling and Technology*, chap. Damage and Lifetime Modeling for Structure Computations, John Wiley & Sons, Inc., , pp. 465–519, n. P. Bansal and J. Lamon eds, ISBN : 978-1-118-23116-6, 712 pages, 2014.
- [27] E. Baranger « Building of a reduced constitutive law for ceramic matrix composites », *International Journal of Damage Mechanics* Vol. 22 n° 8, pp. 1222–1238, 2013.
- [28] J.-L. Chaboche, J.-F. Maire « A new micromechanics based CDM model and its application to CMC's », *Aerospace Science and Technology* Vol. 6 n° 2, pp. 131–145, 2002.
- [29] S. Andrieux, Y. Bamberger, J.-J. Marigo « Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches », *Journal de mécanique théorique et appliquée* Vol. 5 n° 3, pp. 471–513, 1986.
- [30] A. Benallal, V. Tvergaard « Nonlocal continuum effects on bifurcation in the plane strain tension-compression test », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* Vol. 43 n° 5, pp. 741–770, 1995.
- [31] R. H. Peerlings, R. de Borst, W. M. Brekelmans, J. De Vree « Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials », *International Journal for numerical methods in engineering* Vol. 39 n° 19, pp. 3391–3403, 1996.