

Identification de la raideur locale en flexion d'un empilement anisotrope par analyse en vecteurs d'onde. Application à une table d'harmonie de piano innovante.

Local identification of the equivalent anisotropic bending stiffness of a laminate through wavevector analysis. Application to an innovative piano soundboard.

Pierre Margerit¹, Arthur Lebé¹ et Jean-François Caron¹

1 : Laboratoire Navier, UMR 8205, Université Paris Est, Champs sur Marne, France
École des Ponts ParisTech, IFSTTAR, CNRS
6-8 avenue Blaise-Pascal, Cité Descartes, 77455 Champs-sur-Marne
e-mail : arthur.lebee@enpc.fr, pierre.margerit@polytechnique.edu

Résumé

Ce travail présente la modélisation et la caractérisation des propriétés vibratoires d'une table d'harmonie de piano innovante en épicea. La table est constituée de deux couches d'épicea. Une couche présente une orientation uniforme et l'autre couche est constituée de pièces de bois présentant des orientations différentes. La table est modélisée comme une plaque stratifiée non-symétrique. Différentes modélisations de la propagation des ondes planes dans la table d'harmonie sont discutées et comparées. En faisant l'hypothèse a priori que les efforts membranaires sont nuls – ce qui est une approximation justifiée – une méthode de caractérisation inverse des propriétés mécaniques est appliquée à des mesures par vibrométrie laser.

Mots Clés : Propagation des ondes ; Structures hétérogènes ; Méthodes inverses

Keywords : Wave propagation ; Heterogeneous structures ; Inverse methods

1. Introduction

Dans le cadre du projet ANR MAESSTRO (Modélisations Acoustiques, Expérimentations et Synthèse Sonore pour Tables d'haRmonie de pianO), on s'est intéressé au remplacement des tables d'harmonie de piano, traditionnellement fabriquées en épicea, par des matériaux composites. Ce remplacement est motivé par différents aspects [1] : (i) le bois présente une forte variabilité des propriétés mécaniques, entraînant une forte incertitude sur la qualité de l'instrument ; (ii) il est particulièrement sensible aux conditions environnementales, posant par exemple des problèmes au moment du transport ; (iii) le prix de l'épicea utilisé pour la facture des pianos haut de gamme est particulièrement élevé, d'autant plus si l'on prend en compte les frais supplémentaires associés au séchage, l'entretien, etc.

La proposition de solutions de remplacement sur la base de composites pose le problème de la connaissance fine du comportement dynamique des structures à remplacer, comme des structures de remplacement ; cela suppose donc la mise à disposition de méthodes de caractérisation expérimentales adaptées. Dans le cas de la table d'harmonie de piano, on se cantonne traditionnellement au comportement linéaire en flexion de la structure, responsable de la majeure partie du son produit [2] ; on considère également que la table d'harmonie joue son rôle de *haut-parleur* des premières fréquences audibles jusqu'à environ 5 kHz. Il est donc nécessaire de disposer de méthodes de caractérisation permettant l'identification des propriétés de la structure en flexion sur la bande de fréquence considérée, ces propriétés présentant, du fait de la nature des matériaux employés, une forte anisotropie.

Dans l'étude menée à bien au cours de ce travail, on s'est plus particulièrement intéressé au remplacement d'une table d'harmonie proposée par le facteur de pianos Stephen Paulello, partie prenante du projet MAESSTRO. Celle-ci, équipant les nouveaux pianos à queue SP190//, présente deux particularités qui viennent considérablement complexifier la tâche d'identification : (i) elle est composée d'un bicouche d'épicea non symétrique, ce qui entraîne un couplage des mécanismes membranaires et de flexion ; (ii) la couche inférieure de cette stratification est fabriquée à partir d'un assemblage de planches, permettant de faire varier l'orientation des fibres le long de la surface de la structure. La

méthode de caractérisation du comportement de la structure doit donc être à même de fournir des informations locales, tout en prenant en décrivant correctement son comportement couplé.

Pour la caractérisation du comportement linéaire des structures, l'analyse modale associée à une méthode de mise à jour de modèle est souvent retenue [3]. Cette technique permet une caractérisation de certains paramètres associés au comportement global de la structure en basse fréquence ; de façon à identifier des propriétés locales, un grand nombre de modes doivent pouvoir être extraits de la réponse de la structure. La limite haute en fréquence de ce type d'analyse associée à l'augmentation de la superposition modale est alors l'élément critique ; ajouté à la sensibilité de l'identification aux conditions aux limites mal déterminées, cela rend la méthode inutilisable ici.

La limitation de l'analyse modale pour la caractérisation des structures dans le régime des moyennes fréquences motive le développement de méthodes alternatives, le plus souvent basées sur des moyens de mesure de champs de plus en plus répandus et performants [4, 5]. Ces méthodes se basent sur l'identification de paramètres entrant dans les équations du mouvement de la structure (par exemple la Force Analysis Technique [6, 7] ou la méthode des Champs Virtuels [8, 9]), sur les fonctions de Green de ces équations (Image Source Method [10, 11]) ou encore sur la décomposition d'une réponse harmonique en ondes planes [12, 13]. Ce dernier type de méthode s'intéresse particulièrement aux structures élancées, pour lesquelles l'hypothèse de la séparation de variables peut être formulée ; dans le cas des plaques, on s'intéresse aux ondes se propageant dans le plan en régime harmonique. Loin des sources et éventuelles conditions aux limites appliquées à la structure, le front d'onde peut être supposé plan ; dans ce cas, l'onde est paramétrée par un vecteur d'onde complexe, dont la norme et l'orientation de la partie réelle décrivent respectivement la périodicité et la direction de propagation de l'onde. Le postulat principal permettant l'identification de la structure consiste alors à considérer que les éventuels vecteurs d'onde extraits de la réponse harmonique de la structure suivent les lois de dispersion associées à celle-ci. L'indépendance de ces lois aux conditions aux limites permet alors d'envisager l'identification des paramètres entrant en compte dans leur formulation.

Récemment, les auteurs ont proposé une version originale des méthodes permettant l'extraction des vecteurs d'onde. L'analyse en vecteurs d'onde haute résolution proposée, appliquée tout d'abord aux poutres [14] puis aux plaques [15], permet notamment la diminution des incertitudes associées à l'extraction des vecteurs d'onde. Cet aspect fondamental autorise l'application de la méthode même lorsque la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur voire supérieure de la fenêtre d'observation. On montre notamment que cela permet : (i) d'étendre la validité de l'approche en basse fréquence ; (ii) une mise en oeuvre *locale* de la méthode.

On se propose donc ici d'appliquer la méthode proposée à l'identification du comportement en flexion local de la table d'harmonie du piano à queue SP190//. En réalité, le couplage entre les mécanismes membranaires et de flexion caractéristique de la stratification non symétrique entraîne l'assouplissement global du comportement en flexion *apparent*. Il est donc nécessaire de pouvoir, d'un point de vue théorique, faire le lien entre ce comportement identifié et les propriétés du matériau employé. Dans cet objectif, la première partie du présent travail est consacrée à la prédiction des vecteurs d'onde de flexion par la théorie classique des stratifiés (CLPT pour Classical Lamination Plate Theory). On montre que la prise en compte du couplage peut être correctement formulée à l'aide d'une hypothèse de couplage faible correspondant à l'annulation des efforts membranaires. Ensuite, la seconde section du travail est consacrée à l'identification, sur la base de cette formulation simplifiée, de la raideur apparente en flexion locale de la structure à l'aide de l'analyse en vecteurs d'onde originale proposée par les auteurs.

2. La table d'harmonie du piano SP190//

Stephen Paulello équipe ses nouveaux pianos à queue d'une table d'harmonie dont il cherche à faire varier la raideur locale afin de l'adapter aux différentes fréquences des cordes qui y sont couplées. Pour cela, il crée un bicouche d'épicéa : la couche supérieure, homogène et orientée à environ 40° par

rapport à l'horizontale, permet d'assurer la cohésion de la structure ; la couche inférieure est quand à elle composée d'un patchwork permettant de faire varier l'orientation locale des fibres du bois. Ces deux couches ont une épaisseur de 5 mm, portant l'épaisseur du stratifié à 10 mm en négligeant l'épaisseur du film de colle.

Une vue de dessous de la table d'harmonie est proposée en figure 1 ; ont été superposées des lignes dénotant la direction des fibres de la couche supérieure (traits pointillés) et de la couche inférieure (traits pleins). On peut ainsi visualiser des zones dans lesquelles les fibres des deux couches sont quasiment alignées (partie haute), tandis que d'autres zones présentent des fibres disposés perpendiculairement. Une première identification des propriétés du bois a été réalisée sur un échantillon d'épicéa coupé en planche [16]. Réalisée à partir d'une analyse modale, elle a permis d'identifier les raideurs planes et les différents modules de cisaillement du matériau. Listées en table 1, ces propriétés ne sont considérées qu'à titre indicatif, tant les propriétés de l'épicéa peuvent varier d'un échantillon à l'autre. En particulier, le module radial faible identifié Q_{RR} peut être associé à la qualité moindre du bois composant l'échantillon. On utilisera dans la suite du travail ces valeurs pour mener à biens les comparaisons entre différentes théories ainsi que pour la validation croisée des résultats de l'identification du comportement apparent en flexion.

3. Propagation des ondes planes dans les stratifiés

L'objectif de cette première section est de justifier, à des fins d'identification, l'utilisation d'un tenseur équivalent décrivant le comportement apparent de la structure en flexion, celui-ci étant influencé (globalement assoupli) par le couplage membrane-flexion. Cette justification passe par l'étude de la propagation des ondes planes de flexion dans les plaques stratifiées. Trois méthodes sont comparées : (i) une méthode de référence utilisant les éléments finis spectraux ; (ii) le modèle complet correspondant à la théorie classique des stratifiés ; (iii) le modèle réduit utilisant la condensation proposée.

On s'intéresse donc à la réponse d'une plaque stratifiée en régime harmonique, dépourvue de sollicitation. Cette plaque est composée de N couches d'épaisseur respective $e_n = x_3^n - x_3^{n-1}$. Pour une

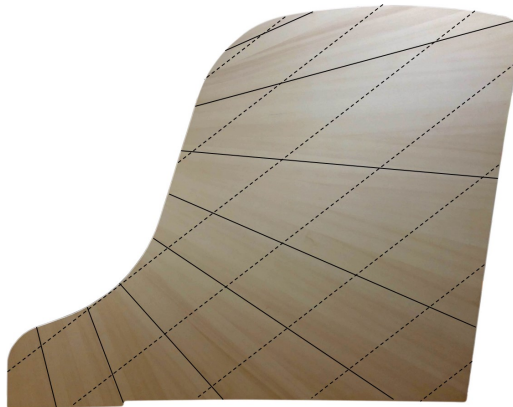


Fig. 1.: Vue de dessous de la table d'harmonie du SP190//. Orientation des fibres dénotées par des traits pleins (couche inférieure variable) et pointillés (couche supérieure uniforme).

Q_{LL}	Q_{RR}	Q_{LR}	G_{LR}	G_{LT}	G_{TR}	ρ	e_0
12000	250	100	900	900	120	450 kg/m ³	5 mm

Tab. 1.: Propriétés indicatives des couches d'épicéa. Modules en MPa.

pulsation donnée ω , les équations du mouvement sont :

$$\text{Équilibre dynamique : } \sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 \xi_i = 0 \quad (\text{Eq. 1})$$

$$\text{Comportement : } \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{Eq. 2})$$

$$\text{Cinématique : } \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\xi_{k,l} + \xi_{l,k}) \quad (\text{Eq. 3})$$

$$\text{Continuité aux interfaces : } \sigma_{i3}^n(x_3^{n+1}) - \sigma_{i3}^{n+1}(x_3^{n+1}) = 0 \quad (\text{Eq. 4})$$

$$\xi_i^n(x_3^{n+1}) - \xi_i^{n+1}(x_3^{n+1}) = 0 \quad (\text{Eq. 5})$$

$$\text{Surfaces libres : } \sigma_{i3}(x_3 = x_3^0) = \sigma_{i3}(x_3 = x_3^N) = 0 \quad (\text{Eq. 6})$$

où les indices latins dénotent les trois dimensions de l'espace $(i, j, k, l) = \{1, 2, 3\}$; utilisés dans la suite, les indices grecs dénotent les dimensions du plan contenant la plaque $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \{1, 2\}$. L'absence de sources d'excitation rend le problème homogène; loin des conditions aux limites, on peut considérer la plaque comme infinie et le front d'onde plan. Dans ce cas, on écrit le déplacement $\underline{\xi}$ sous la forme :

$$\underline{\xi}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\phi}(x_3) e^{-i \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{x}}_\alpha} \quad (\text{Eq. 7})$$

où $\underline{\mathbf{k}}$ est un vecteur d'onde complexe et $\underline{\phi}$ le mode associé; ces deux quantités sont à déterminer. En injectant cette forme dans les équations ci-dessus, on obtient le système d'équations suivant :

$$k_\delta k_\beta C_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi_\gamma + i k_\beta C_{\alpha\beta 33} \phi_{3,3} - C_{\alpha 3\gamma 3} \phi_{\gamma,33} + i k_\gamma C_{\alpha 3\gamma 3} \phi_{3,3} - \rho \omega^2 \phi_\alpha = 0 \quad (\text{Eq. 8})$$

$$k_\gamma k_\beta C_{\beta 3\gamma 3} \phi_3 + i k_\beta C_{\beta 3\gamma 3} \phi_{\gamma,3} - C_{3333} \phi_{3,33} + i k_\delta C_{33\gamma\delta} \phi_{\gamma,3} - \rho \omega^2 \phi_3 = 0 \quad (\text{Eq. 9})$$

auquel on se doit d'ajouter les conditions de continuité aux interfaces (Eq. 5) et de surface libre (Eq. 6). Ce problème est un problème 1D, où seule la dépendance du champ $\underline{\phi}$ en x_3 est inconnue.

Les paragraphes qui suivent développent différentes méthodes pour résoudre le problème ci-dessus. En particulier, on peut transformer celui-ci en un problème aux valeurs propres en donnant, en plus de la pulsation ω , la direction de propagation des ondes θ ; soit :

$$\underline{\mathbf{k}} = k \cdot \underline{\mathbf{n}} = k [\cos(\theta) \sin(\theta)] \quad (\text{Eq. 10})$$

ce qui revient à faire l'hypothèse que les parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde sont colinéaires; le présent travail ne portant que sur la partie réelle du vecteur d'onde, cette hypothèse n'est pas limitante ici. Dans le cas des plaques homogènes isotropes, le problème ainsi formulé se réduit à l'équation transcendente associé aux modes de Lamb [17]. Le cas des plaques anisotropes stratifiées requiert l'emploi de méthodes approchées.

3.1. Solution de référence : SFEM

Les premiers travaux adressant le problème de la propagation des ondes planes dans les multicouches sont dus à Thomson [18], dont l'idée fut d'exprimer les conditions de continuité aux interfaces (Eq. 5) à l'aide de matrices de *transfert*. Les premières mises en oeuvre de cette méthode ont montré sa forte instabilité [19], motivant la proposition de différentes reformulations au cours des décennies suivantes [20, 21, 22].

De façon alternative, la formulation variationnelle du problème ci-dessus peut être utilisée [23, 24, 25]; celle-ci permet de formuler le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(k^2 \mathbf{K}_2 + i k \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 11})$$

qui est donc quadratique en le nombre d'onde k . L'approche élément finis correspondante [26] est couramment dénommée SFEM (Spectral Finite Elements Method) [27] ou SAFE (Semi Analytical Finite Elements) [28]. Elle permet de résoudre simplement ce problème, et a été implémentée dans le cadre de ce travail de façon à fournir les résultats de référence. En utilisant des éléments linéaires, une convergence satisfaisante des résultats est obtenue, dans le régime fréquentiel considéré, avec 10 éléments par couche [16].

3.2. Théorie classique des stratifiés

Alors que la méthode SFEM permet de donner des résultats de référence, il est également possible d'utiliser les modèles réduits pour prédire les paramètres d'ondes planes se propageant dans les plaques e régime harmonique. Cette alternative présente deux principaux avantages : (i) la réduction de la taille du problème, facilitant à la fois la résolution du problème direct et du problème inverse ; (ii) la possibilité de résoudre des problèmes aux limites. Ici, on choisit d'utiliser la théorie classique des stratifiés, généralisation du modèle de plaque mince de Love-Kirchhoff aux plaques multicouches. Ce modèle est formulé par une approche cinématique, qui correspond au choix du champ de déplacement suivant :

$$\xi_\alpha = U_\alpha - x_3 U_{3,\alpha} \quad \text{et} \quad \xi_3 = U_3 \quad (\text{Eq. 12})$$

duquel on déduit la partie plane des déformations :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} + x_3 \kappa_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad 2\epsilon_{\alpha\beta} = U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha} \quad \text{et} \quad \kappa_{\alpha\beta} = -U_{3,\alpha\beta} \quad (\text{Eq. 13})$$

où les tenseurs $\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{\underline{\kappa}}$ dénotent respectivement les déformation généralisées de membrane et de courbure. Telle que déduite du champ de déplacement postulé, les composantes hors-plan du tenseur de déformation sont nulles ; si les composantes de cisaillement hors-plan $\varepsilon_{\alpha 3}$ peuvent être négligées dans le régime des grandes longueurs d'onde (élancement équivalent important), il est important de prendre en compte l'effet Poisson transverse. Celui-ci est décrit par la loi constitutive en contraintes planes :

$$\sigma_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} \quad \text{avec} \quad Q_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{C_{\alpha\beta 33} C_{33\gamma\delta}}{C_{3333}} \quad (\text{Eq. 14})$$

les équations du mouvement associées au modèle sont obtenues par intégration des équations d'équilibre dynamique 3D (Eq. 1) :

$$N_{\alpha\beta,\beta} + \omega^2 S U_\alpha = 0 \quad (\text{Eq. 15})$$

$$V_{\alpha,\alpha} + \omega^2 S U_3 = 0 \quad (\text{Eq. 16})$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - V_\alpha = 0 \quad (\text{Eq. 17})$$

où $\underline{\underline{N}}$, $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{V}}$ sont respectivement les efforts de membranaires, les moments et les efforts tranchants. Les inerties de rotation ayant été négligées, seul le scalaire S décrit la partie inertielle du modèle. Les deux dernières équations peuvent être combinées pour faire disparaître les efforts tranchants. Peut finalement être écrite la loi de comportement généralisée, associant les efforts généralisés aux déformations généralisées :

$$N_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta} \quad (\text{Eq. 18})$$

$$M_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta} \quad (\text{Eq. 19})$$

où les tenseurs des raideurs généralisées $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{D}}$ sont obtenus comme suit :

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{n=1}^N e_n \underline{\underline{Q}}^n, \quad \underline{\underline{B}} = \sum_{n=1}^N \frac{(x_3^n)^2 - (x_3^{n-1})^2}{2} \underline{\underline{Q}}^n, \quad \underline{\underline{D}} = \sum_{n=1}^N \frac{(x_3^n)^3 - (x_3^{n-1})^3}{3} \underline{\underline{Q}}^n \quad (\text{Eq. 20})$$

où les tenseurs des raideurs en contraintes planes \mathbf{Q}^n sont déduits de ces raideurs dans le repère d'orthotropie de chaque couche ; en notation de Voigt :

$$\begin{bmatrix} Q_{11}^n \\ Q_{22}^n \\ Q_{12}^n \\ Q_{16}^n \\ Q_{26}^n \\ Q_{66}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n^4 & s_n^4 & 2s_n^2c_n^2 & 4s_n^2c_n^2 \\ s_n^4 & c_n^4 & 2s_n^2c_n^2 & 4s_n^2c_n^2 \\ s_n^2c_n^2 & s_n^2c_n^2 & c_n^4 + s_n^4 & -4s_n^2c_n^2 \\ c_n^3s_n & -s_n^3c_n & s_n^3c_n - c_n^3s_n & 2(s_n^3c_n - c_n^3s_n) \\ s_n^3c_n & -c_n^3s_n & c_n^3s_n - s_n^3c_n & 2(c_n^3s_n - s_n^3c_n) \\ s_n^2c_n^2 & s_n^2c_n^2 & -2s_n^2c_n^2 & c_n^4 + s_n^4 - 2s_n^2c_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{LL}^n \\ Q_{RR}^n \\ Q_{LR}^n \\ G_{LR}^n \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 21})$$

où on a posé $c_n = \cos(\phi_n)$ et $s_n = \sin(\phi_n)$, avec ϕ_n l'orientation de la $n^{\text{ième}}$ couche par rapport au repère du stratifié.

La combinaison des équations du mouvement, du comportement généralisé et de l'expression des déformations généralisées ainsi que l'utilisation de l'hypothèse de la forme du champ en onde plane (Eq. 7) permet d'écrire le problème général associé à la propagation des ondes planes donné par la théorie classique des stratifiés :

$$k_\beta k_\delta A_{\alpha\beta\gamma\delta} \Phi_\gamma + \mathbf{i} k_\beta k_\gamma k_\delta B_{\alpha\beta\gamma\delta} \Phi_3 - \omega^2 S \Phi_\alpha = 0 \quad (\text{Eq. 22})$$

$$k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta D_{\alpha\beta\gamma\delta} \Phi_3 - \mathbf{i} k_\alpha k_\beta k_\delta B_{\alpha\beta\gamma\delta} \Phi_\gamma - \omega^2 S \Phi_3 = 0 \quad (\text{Eq. 23})$$

Il est aisé de remarquer à partir de ces équations le rôle que jouent les raideurs généralisées \mathbf{B} en tant que couplage entre les mécanismes associés aux déplacements dans le plan Φ_α et hors-plan Φ_3 .

En utilisant l'expression (Eq. 10), ce problème se réécrit de la façon suivante :

$$\left(k^4 \mathbf{T}_4(\theta) + \mathbf{i} k^3 \mathbf{T}_3(\theta) + k^2 \mathbf{T}_2(\theta) - \omega^2 S \mathbf{I} \right) \underline{\Phi} = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 24})$$

où les 3 matrices \mathbf{T}_i peuvent être déduites de (Eq. 22) et (Eq. 23). On obtient donc finalement un problème aux valeurs propres de taille 3, polynomial d'ordre 4 en k , qui peut être converti en un problème de taille 12 linéaire en k afin d'être résolu par des méthodes de recherche de valeurs propres usuelles.

3.3. Hypothèse de couplage faible

Si la résolution du problème direct (Eq. 24) associé à la théorie classique des stratifiés est relativement aisée, son inversion en vue de l'identification des propriétés généralisées \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} ou \mathbf{Q} apparaît beaucoup plus complexe. Le point de vue adopté ici consiste donc à faire une hypothèse complémentaire sur la nature du couplage membrane-flexion de manière à rendre le problème inversible.

Dans le cas où le tenseur des raideurs généralisées \mathbf{B} correspondant au couplage est nul, les équations (Eq. 22) et (Eq. 23) sont découplées. Les mécanismes associés aux ondes sources de déplacement plans sont régis par deux équations homogènes couplées. Ces équations ont une solution analytique dans le cas où les ondes se propagent le long d'un axe de symétrie de la plaque ; cette solution correspond aux modes longitudinaux et de cisaillement dans le plan. Par opposition, l'équation associée à la flexion est scalaire, et peut être résolue dans le cas général. Les solutions s'expriment comme suit, avec les composantes de \mathbf{D} exprimées en notation de Voigt :

$$k^4 \left(c_\theta^4 D_{11} + s_\theta^4 D_{22} + 2c_\theta^2 s_\theta^2 (D_{12} + 2D_{66}) + 4c_\theta^3 s_\theta D_{16} + 4c_\theta s_\theta^3 D_{26} \right) = \omega^2 S \quad (\text{Eq. 25})$$

où $c_\theta = \cos(\theta)$ et $s_\theta = \sin(\theta)$. Pour un couple (ω, θ) donné, 4 solutions de k existent : deux sont réelles (ondes propagatives) et deux imaginaires (ondes évanescentes). Ces dernières sont importantes seulement près des conditions aux limites ; elles ne sont donc pas prises en compte dans ce travail.

L'équation (Eq. 25) peut être utilisée pour donner un indicateur de raideur *spécifique équivalente* en flexion B associé à la direction θ :

$$B(\theta) = \frac{\omega^2}{k^4} = \frac{c_\theta^4 D_{11} + s_\theta^4 D_{22} + 2c_\theta^2 s_\theta^2 (D_{12} + 2D_{66}) + 4c_\theta^3 s_\theta D_{16} + 4c_\theta s_\theta^3 D_{26}}{S} \quad (\text{Eq. 26})$$

Cet indicateur, invariant en fréquence, est utilisé dans la suite pour comparer les différentes prédictions et pour formuler le problème d'identification des propriétés apparentes en flexion.

Lorsque le tenseur $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ ne peut être négligé, il est nécessaire de prendre en compte son influence dans le comportement en flexion du stratifié. Pour cela, une stratégie peut consister à considérer que le couplage est faible ; ou encore, que les ondes de flexion ne sont pas sources d'efforts membranaires. Cette hypothèse, correspondant à écrire $\underline{\underline{\mathbf{N}}} = 0$, peut être injectée dans la loi de comportement généralisée (Eq. 18) ; soit en notation de Voigt :

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \quad (\text{Eq. 27})$$

$$\text{d'où } \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} = -\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \quad (\text{Eq. 28})$$

$$\text{soit } \underline{\underline{\mathbf{M}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^* \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \quad (\text{Eq. 29})$$

$$\text{avec } \underline{\underline{\mathbf{D}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} \quad (\text{Eq. 30})$$

Le tenseur $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^*$ obtenu représente alors la raideur en flexion *apparente* de la plaque, qui prend en compte une correction associée au couplage.

3.4. Comparaison des différentes prédictions

Quatre façons différentes de prédire les propriétés dispersives des ondes de flexion peuvent, sur la base des paragraphes précédents, être envisagées : (i) par la méthode SFEM (Eq. 11) ; (ii) par la théorie classique des stratifiée complète (Eq. 22), (Eq. 23) ; (iii) par la théorie complètement découplée (Eq. 25) ; (iv) à l'aide du comportement corrigé proposé en (Eq. 30). Cette dernière partie de la section concerne donc la comparaison des différentes solutions, dans le cas de la table d'harmonie du SP190//. Cette table d'harmonie étant un bicouche, il est toujours possible de se placer dans un repère correspondant localement à la bissectrice des orientations des couches respectives. Les angles des couches ϕ_n sont alors tels que $\psi = (\phi_0 + \phi_1) = (\phi_0 - \phi_2)$, où ϕ_0 est l'angle que forme la bissectrice avec le repère global de la plaque et 2ψ représente l'angle entre les deux couches. Les épaisseurs étant égales, on note également $e_1 = e_2 = e_0$. On peut alors poser, avec l'aide de la notation de Voigt et la formule de changement de base (Eq. 21), dans le repère de la bissectrice :

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^1 = \begin{bmatrix} a & b & e \\ b & c & f \\ e & f & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^2 = \begin{bmatrix} a & b & -e \\ b & c & -f \\ -e & -f & d \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 31})$$

Cela permet de donner les expressions des différentes composantes des raideurs généralisées (Eq. 20) :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 2e_0 \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = e_0^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & f \\ e & f & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \frac{2}{3} e_0^3 \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 32})$$

Ces tenseurs possèdent tous la symétrie orthotrope ; celle-ci se transmet également au tenseur corrigé $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^*$ par l'expression (Eq. 30). On se contente donc de tracer dans ce qui suit les résultats correspondant à $0 \leq \theta - \phi_0 \leq \pi/2$. Le résultat de la comparaison des différentes prédictions au sens de la raideur équivalente en flexion $B(\theta - \phi_0)$ (Eq. 26) est donné en figure 2, pour trois valeurs de ψ (15° , 30° et 45°) et sur la base des propriétés indicatives d'un $\frac{7}{7}$ épica listées en table 1. Les résultats de SFEM

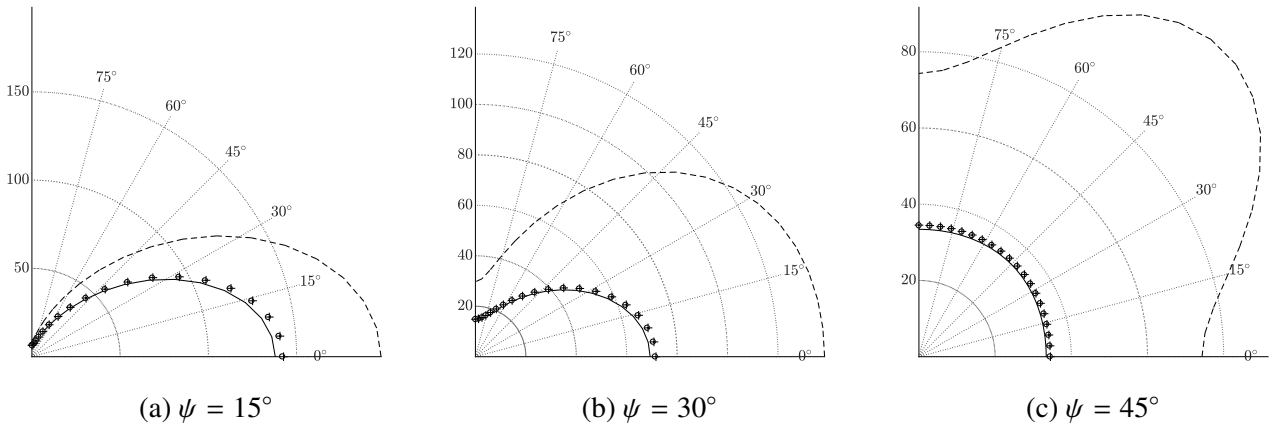


Fig. 2.: Raideur équivalente en flexion $B(\theta - \phi_0)$ (Eq. 26). Comparaison des différentes prédictions, pour trois configurations différentes. Angles des couches : $\phi_1 = \phi_0 + \psi$ et $\phi_2 = \phi_0 - \psi$. Trait plein : SFEM à 500 Hz (Eq. 11); ronds : théorie des stratifiés complète (Eq. 24); pointillés : plaque découplée; croix : correction proposée.

correspondent à un calcul effectué à la fréquence de 500 Hz. On remarque que la non prise en compte du couplage (lignes pointillées) entraîne une forte surestimation de la raideur en flexion du stratifié, l'erreur commise augmentant avec ψ . Au contraire, on observe que l'hypothèse du couplage faible (croix) semble satisfaisante, tant les résultats sont équivalents au modèle de stratifié complet (ronds). Ces deux dernières prédictions des différences minimales avec les résultats de référence (traits pleins); ces différences sont dues aux effets de cisaillement hors-plan. La prise en compte de ces effets par un modèle de plaque épaisse est donc une perspective intéressante de travail.

4. Identification de la raideur apparente en flexion

Cette section décrit la procédure menant à l'identification de la raideur en flexion apparente $\underline{\underline{D}}^*$ (Eq. 30) à partir de l'analyse en vecteurs d'onde proposée par les auteurs [15]. La mesure ayant permis la mise en oeuvre de cette procédure est tout d'abord décrite; s'ensuit une brève présentation de la méthode d'extraction des vecteurs d'onde, suivie par la procédure d'identification.

4.1. Mesure de la réponse harmonique de la structure

La mesure utilisée pour la mise en oeuvre de la procédure proposée dans ce travail et effectuée sur la table d'harmonie du SP190// est conçue de façon à pouvoir appliquer également la technique d'analyse modale. Dans ce but, c'est la réponse transitoire libre de la structure qui est mesurée. Celle-ci est réalisée à l'aide d'un dispositif de vibrométrie robotisé, développé au Laboratoire Navier [29]. Ce dispositif permet, lorsque la répétabilité de l'excitation de la structure est satisfaisante, de mesurer le champ de vitesse instantané de celle-ci, le long d'un maillage de points prédéfini. Un pot vibrant situé à proximité du coin inférieur gauche de la table d'harmonie a été utilisé comme marteau d'impact; son déclenchement est réalisé à l'aide d'un signal électrique, ce qui permet d'assurer une bonne reproductibilité de l'excitation. La mesure de la réponse de la structure est réalisée le long d'un maillage de 1600 points uniformément répartis le long de sa surface. De façon à obtenir la réponse harmonique de la structure, la transformée de Fourier temporel du signal mesuré est réalisée; cette opération permet finalement d'obtenir une collection de 3400 réponses harmoniques, pour des fréquences s'étalant de 50 Hz à 1800 Hz.

4.2. Analyse en vecteurs d'onde

La méthode d'analyse en vecteurs d'onde proposée [15] s'applique à une réponse harmonique de la structure à la fréquence ω . L'idée est d'identifier les paramètres du modèle de signal suivant,

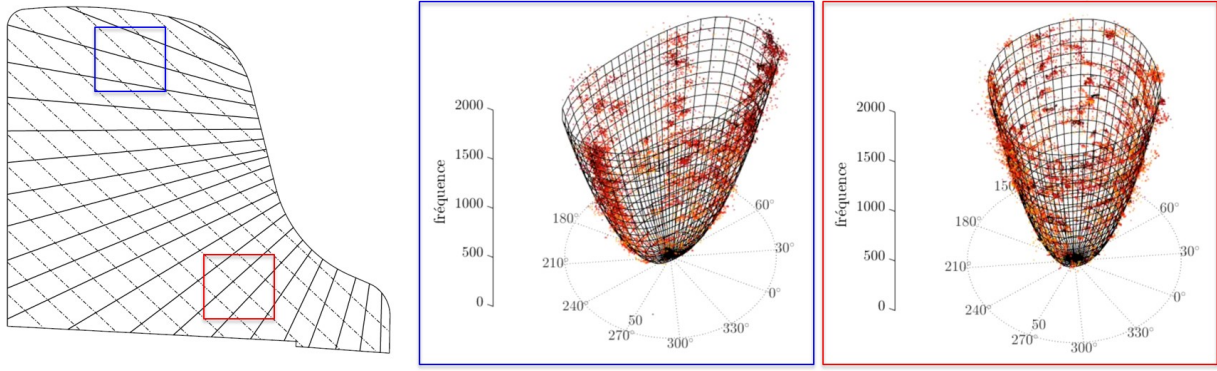


Fig. 3.: Application de la procédure d'identification sur deux zones de la table d'harmonie. Nuage de points : vecteurs d'ondes expérimentaux ; maillage : surface de dispersion identifiée.

représentant la réponse d'une plaque sur un domaine $\underline{x} \in \Omega$ éventuellement localisé :

$$s(\underline{x}, \omega) = \sum_{r=1}^{R(\omega)} a_r(\omega) e^{-i \underline{k}_r(\omega) \cdot \underline{x}} + b(\underline{x}, \omega) \quad (\text{Eq. 33})$$

les paramètres étant l'ordre du signal R , les R amplitudes complexes a_r et les vecteurs d'onde associés \underline{k}_r . L'analyse proposée fait usage de l'algorithme ESPRIT [30, 31], qui lui confère son aspect *haute-résolution* ; le choix de l'ordre du signal R est quant à lui automatisé à l'aide du critère ESTER [32]. L'application de cette analyse aux réponses harmoniques mesurées permet d'obtenir une collection de vecteurs d'onde dont la dépendance selon la fréquence et la direction de propagation est caractéristique du milieu de propagation des ondes.

4.3. Identification de la raideur apparente en flexion locale

On cherche ici à identifier, à partir de la collection de P vecteurs d'onde \underline{k}_p obtenue, la raideur apparente en flexion locale de la plaque, décrite par les composantes du tenseur $\underline{\underline{D}}^*$ (Eq. 30). On se propose pour cela d'utiliser la raideur spécifique équivalente définie en (Eq. 26). Il est en effet possible d'identifier, à partir des nombres d'onde k_p et des pulsations ω_p et angles θ_p associés (Eq. 10), les composantes $B_{ij}^* = D_{ij}^*/S$ de cette raideur équivalente, de la façon suivante :

$$\mathbf{T}[\mathbf{v}(\theta_1) \dots \mathbf{v}(\theta_P)]^T [\mathbf{B}_{11}^* \quad \mathbf{B}_{22}^* \quad \mathbf{B}_{12}^* + 2\mathbf{B}_{66}^* \quad \mathbf{B}_{16}^* \quad \mathbf{B}_{26}^*] = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \omega_P^2 \\ & \dots & & & \\ & & k_1^4 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & k_P^4 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 34})$$

$$\mathbf{v}(\theta) = \mathbf{T} [c_\theta^4 \quad s_\theta^4 \quad 2c_\theta^2 s_\theta^2 \quad 4c_\theta^3 s_\theta \quad 4c_\theta s_\theta^3] \quad (\text{Eq. 35})$$

L'inversion de ce système linéaire peut se faire au sens des moindres carrés ; la taille P de la collection de vecteurs d'onde extraits (de l'ordre de plusieurs milliers) rendant celui-ci largement surdéterminé. La procédure est illustrée sur la figure 3, pour deux zones particulières correspondant à un carré de 10×10 points de mesure. Pour chacune des zones, on a représenté en 3D la collection de vecteurs d'onde obtenue : le plan (xOy) contient le vecteur d'onde, tandis que l'axe z représente la fréquence. Les vecteurs d'onde extraits par l'analyse expérimentale sont représentés par un nuage de points. Après identification des B_{ij}^* à partir de (Eq. 34), il est possible de superposer la prédiction des vecteurs d'onde correspondant au modèle de plaque identifié ; cela est représenté sur la figure 3 par un maillage. Les deux zones sont choisies pour démontrer la possibilité de capter un comportement local. Sur la partie haute, les fibres sont quasiment alignées et la surface de dispersion présente une forte anisotropie ; sur la partie inférieure droite, les fibres se croisent pratiquement à 90° , ce qui rend le comportement en flexion isotrope (voir figure 2c).

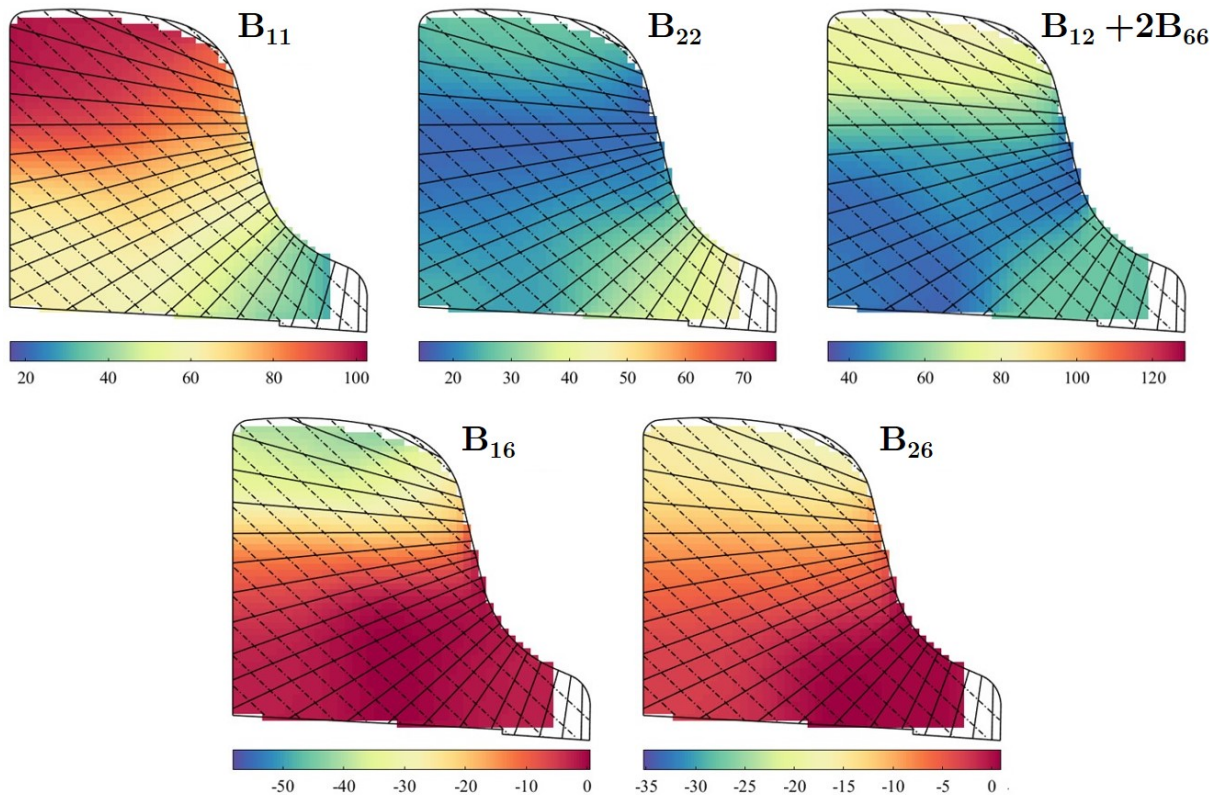


Fig. 4.: Carte des composantes du tenseurs des raideurs spécifiques apparentes en flexion de la table d'harmonie.

Finalement, la procédure est reproduite en faisant glisser la zone d'observation le long du maillage de mesure ; cela permet d'obtenir les cartes des composantes B_{ij}^* locales. Celles-ci sont représentées sur la figure 4 et permettent de visualiser l'influence de l'orientation des fibres sur le comportement en flexion de la structure. On remarque par exemple que les composantes de couplage $B_{\alpha 6}^*$ sont faibles dans la partie inférieure, pour laquelle les fibres sont disposées quasiment symétriquement par rapport à l'axe x_1 .

5. Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on s'est intéressé au comportement en flexion d'une table d'harmonie de piano, multicouche, anisotrope et dont les propriétés varient le long de la surface. Plus particulièrement, on a cherché à prédire de façon théorique et identifier expérimentalement la raideur apparente locale en flexion de la structure, dont la stratification non symétrique crée un couplage membrane-flexion qu'il est nécessaire de prendre en compte. Différentes approches ont été abordées pour la prédiction : (i) une solution de référence basée sur des éléments finis spectraux ; (ii) l'utilisation de la théorie classique des stratifiés dans sa formulation générale ; (iii) le cas des plaques découplées ; (iv) une formulation réduite basée sur une hypothèse de couplage faible. Cette dernière, consistant à négliger les efforts membranaires, permet de rendre compte du couplage à l'aide d'une simple correction sur le tenseur des raideurs généralisées en flexion. Sur la base de comparaisons avec les résultats de référence, on a montré la pertinence de cette hypothèse. Dans un second temps, une procédure d'identification a été mise en oeuvre. Celle-ci est basée sur les résultats d'une analyse en vecteurs d'onde locale, appliquée à la réponse harmonique mesurée de la structure. A partir de la collection de vecteurs d'onde extraite, la raideur apparente locale de la structure en flexion est identifiée. Finalement, la carte des rigidités en flexion de la structure est obtenue.

Remerciements

Ce travail a été financé par l'ANR dans le cadre du projet MAESSTRO (ModélisAtion Et Synthèse Sonore pour Tables d'haRmonie de pianO, ANR-14-CE07-0014)

Références

- [1] A. Damodaran, L. Lessard, A. Suresh Babu « An Overview of Fibre-Reinforced Composites for Musical Instrument Soundboards », *Acoustics Australia* Vol. 43 n° 1, pp. 117–122, 2015.
- [2] K. Ege « La table d'harmonie du piano - Etudes modales en basses et moyennes fréquences », Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique X, 2009.
- [3] J. E. Mottershead, M. Link, M. I. Friswell « The sensitivity method in finite element model updating : A tutorial », *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 25 n° 7, pp. 2275–2296, 2011.
- [4] S. Rothberg, M. Allen, P. Castellini, D. Di Maio, J. Dirckx, D. Ewins, B. Halkon, P. Muyschondt, N. Paone, T. Ryan, H. Steger, E. Tomasini, S. Vanlanduit, J. Vignola « An international review of laser Doppler vibrometry : Making light work of vibration measurement », *Optics and Lasers in Engineering* n° October, pp. 0–1, 2016.
- [5] T. J. Bebernis, D. A. Ehrhardt « High-speed 3D digital image correlation vibration measurement : Recent advancements and noted limitations », *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 86, pp. 35–48, 2017.
- [6] Q. Leclère, C. Pézerat « Vibration source identification using corrected finite difference schemes », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 331 n° 6, pp. 1366–1377, 2012.
- [7] F. Ablitzer, C. Pézerat, J.-M. Génevaux, J. Bégue « Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 333 n° 9, pp. 2454–2468, 2014.
- [8] F. Pierron, M. Grediac, *The Virtual Fields Method*, Springer, 2011.
- [9] A. Berry, O. Robin, F. Pierron « Identification of dynamic loading on a bending plate using the Virtual Fields Method », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 333 n° 26, pp. 7151–7164, 2014.
- [10] J. Cuenca, F. Gautier, L. Simon « Measurement of the complex bending stiffness of a flat panel covered with a viscoelastic layer using the image source method », in : 8th European Conference on Noise Control 2009, EURONOISE 2009 - Proceedings of the Institute of Acoustics, vol. 31, 2009.
- [11] N. B. Roozen, Q. Leclère, K. Ege, Y. Gerges « Estimation of plate material properties by means of a complex wavenumber fit using Hankel's functions and the image source method », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 390, pp. 257–271, 2017.
- [12] J. Berthaut, M. N. Ichchou, L. Jezequel « K-space identification of apparent structural behaviour », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 280, pp. 1125–1131, 2005.
- [13] R. Cherif, J. D. Chazot, N. Atalla « Damping loss factor estimation of two-dimensional orthotropic structures from a displacement field measurement », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 356, pp. 61–71, 2015.
- [14] P. Margerit, A. Lebé, J.-f. Caron, X. Boutillon « High Resolution Wavenumber Analysis (HRWA) for the Mechanical Characterization of Viscoelastic Beams », *Journal of Sound and Vibration* .
- [15] P. Margerit, A. Lebé, J.-F. Caron, K. Ege, X. Boutillon « High-Resolution Wavevector Analysis for the characterization of the dynamic response of composite plates », *Journal of Sound and Vibration* Vol. Final revision.
- [16] P. Margerit « Caractérisation large bande du comportement dynamique linéaire des structures hétérogènes viscoélastiques anisotropes. Application à la table d'harmonie du piano. », Ph.D. thesis, Université Paris-Est, Ecole des Ponts Paristech, 2018.
- [17] H. Lamb « On Waves in an Elastic Plate », *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* Vol. 93 n° 648, pp. 114–128, 1917.
- [18] W. T. Thomson « Transmission of elastic waves through a stratified solid medium », *Journal of Applied Physics* Vol. 21 n° 2, pp. 89–93, 1950.
- [19] B. N. A. Haskell « The dispersion of surface waves on multilayered media », *Bulletin of the Seismological Society of America* Vol. 43 n° 1, pp. 17–34, 1953.
- [20] H. Schmidt, G. Tango « Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms », *Geophysical Journal International* Vol. 84 n° 2, pp. 331–359, 1986.
- [21] A. H. Nayfeh « The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media », *Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 89 n° 4, pp. 1521–1531, 1991.
- [22] S. I. Rokhlin, L. Wang « Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media : stiffness matrix method. », *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 112 n° 3 Pt 1, pp. 822–834, 2002.
- [23] S. B. Dong, R. B. Nelson « On the Natural Vibrations and waves in laminated orthotropic plates », *Journal of Applied Mechanics* Vol. 39 n° 3, pp. 739–745, 1972.
- [24] S. K. Datta, A. H. Shah, R. L. Bratton, T. Chakraborty « Wave propagation in laminated composite plates », *JASA* Vol. 83 n° 6, pp. 2020–2026, 1988.
- [25] Z. Xi, G. Liu, K. Lam, H. Shang « Dispersion and characteristic surfaces of waves in laminated composite circular cylindrical shells », *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 108 n° 5 Pt 1, pp. 2179–86, 2000.

- [26] P. J. Shorter « Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates », *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 115 n° 5, pp. 1917, 2004.
- [27] E. Barbieri, A. Cammarano, S. De Rosa, F. Franco « Waveguides of a Composite Plate by using the Spectral Finite Element Approach », *Journal of Vibration and Control* Vol. 15 n° 3, pp. 347–367, 2009.
- [28] I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea, E. Viola « Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 295 n° 3-5, pp. 685–707, 2006.
- [29] P. Margerit, A. Lebé, J.-f. Caron, T. Gobin « The Robotized Laser Doppler Vibrometer : on the use of an industrial robot arm to achieve 3D full-field velocity measurements », *En préparation* .
- [30] R. Roy, A. Paulraj, T. Kailath « Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques-ESPRIT », *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* Vol. 37 n° 7, pp. 94–101, 1989.
- [31] S. Rouquette, M. Najim « Estimation of frequencies and damping factors by two-dimensional ESPRIT type methods », *IEEE Transactions on Signal Processing* Vol. 49 n° 1, pp. 237–245, 2001.
- [32] R. Badeau, B. David, G. Richard « A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques », *IEEE Transactions on Signal Processing* Vol. 54 n° 2, pp. 450–458, 2006.